

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 088

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu X^t transpusa unei matrice pătratice X și cu $\text{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X .

5p a) Să se demonstreze că $\text{Tr}(A + A^t) = 2\text{Tr}(A)$.

5p b) Să se demonstreze că dacă $\text{Tr}(A \cdot A^t) = 0$, atunci $A = O_2$.

5p c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A) = 0$.

2. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $K = \{aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

5p a) Să se arate că $A^2 \in K$.

5p b) Să se arate că mulțimea K este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

5p c) Să se arate că pentru orice $X \in K$, $X \neq O_2$ există $Y \in K$ astfel încât $XY = I_2$.