MATE - INFO

SUBIECTUL I

1. $(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}-1)^2 = 5+2\sqrt{5}+1+5-2\sqrt{5}+1 = 12$

2. $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)=0$ pt că $f(3)=0$

3. $\log_2(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow \log_2(x-2)^2=0$

cum $(x-2)^2>0$ pt $x\neq 2$ $\Rightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow x\in\{1;3\}$

4. $\overline{abc}$ impar $\Leftrightarrow c$ impar $\Leftrightarrow c=3$

$\Rightarrow a,b\in\{2,4\}$ distincte $\Rightarrow P_2$ numere

deci 2 numere

5. panta dreptei AB este $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$

dreptele sunt perpendiculare deci $m\cdot m_{AB}=-1$

$\Rightarrow m=-1$

ec dreptei ce conține A și are panta m

este $y-y_A=m(x-x_A)$

deci $y-2=-1(x-1) \Leftrightarrow y=-x+3$

6. $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=\sin x-\sin x=0$

SUBIECTUL II

1. a) $B(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3 \Rightarrow \det B(0)=\det I_3=1$

b) $B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}=$

$=2\cdot\begin{pmatrix}1&0&\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\\frac{3}{2}(x+y)&0&1\end{pmatrix}=2\,B\left(\frac{x+y}{2}\right)$

II 1. c)

$$B(x^2+1)\cdot B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+3x(x^2+1) & 0 & x+x^2+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+1)+3x & 0 & 3x(x^2+1)+1 \end{pmatrix}$$

ecuatia devine

$$\begin{pmatrix} 1+3x^3+3x & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3x+3 & 0 & 3x^3+3x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+x+1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de unde $3x^3+3x+1=1 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3x(x^2+1)=0 \\ x\in\mathbb{R} \end{matrix}\right| \Rightarrow x=0$

II 2. a) $(-3)\circ 3 = \frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3 = 3$

b) $n\circ n = 11 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(n-3)^2+3=11 \Leftrightarrow (n-3)^2=16$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} |n-3|=4 \\ n\in\mathbb{N} \end{matrix}\right| \Leftrightarrow n\in\{7\}$

deci $n=7$

c) $3\circ x = x\circ 3 = 3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$1\circ 2\circ 3\circ \ldots \circ 2015 = (a\circ 3)\circ b = 3\circ b = 3$

unde $a = 1\circ 2$

$b = 4\circ 5\circ \ldots \circ 2015$

III 1. a) $f'(x) = \dfrac{(x+2)'(x-1) - (x+2)(x-1)'}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$

1. b) f' derivabilă pt că este comp de funcții elementare

$f''(x) = -3 \cdot \dfrac{-2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{6}{(x-1)^3}$

dacă $x > 1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow (x-1)^3 > 0$

$\Rightarrow f''(x) > 0, \ \forall x \in (1; +\infty)$

$\Rightarrow f$ convexă pe $(1; +\infty)$

1. c) tangenta la graficul funcției este paralelă cu dreapta $y = -3x$ dacă pantele lor sunt egale

panta tangentei este $f'(a)$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

panta dreptei $y = -3x$ este -3

deci: $f'(a) = -3 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{(a-1)^2} = -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow |a-1| = 1$

$\Rightarrow a \in \{0; 2\}$

$(a, f(a))$ sunt punctele cerute

adică $A(0; -2)$; $B(2; 4)$

III 2. a) $\int_1^2 \frac{1}{x} f(x)\,dx = \int_1^2 e^x\,dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e = e(e-1)$

b) $\int x e^x\,dx = \int x\cdot(e^x)'\,dx = x e^x - \int x' e^x\,dx$

$= x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + k\ ;\ k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x) = x e^x - e^x + k$

$F(1) = 0 \Rightarrow e - e + k = 0 \Rightarrow k = 0$

deci $F(x) = x e^x - e^x = e^x(x-1)$

c) $I_n = \int_0^1 x^n \cdot x e^x\,dx = \int_0^1 x^{n+1} e^x\,dx =$

$= \int_0^1 x^{n+1}\cdot(e^x)'\,dx = x^{n+1} e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^{n+1})' e^x\,dx =$

$= e - 0 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x\,dx = e - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx =$

$\Rightarrow I_n = e - (n+1) I_{n-1} \Rightarrow I_n + (n+1) I_{n-1} = e$