I.1. $(2^0+2^1+2^2):(2^3-1)=\frac{2^2+2^1+1}{2^3-1}=\frac{2^2+2^1+1}{(2-1)(2^2+2^1+1)}=\frac{1}{2-1}=1$

Este corect și calculul brutal

$(2^0+2^1+2^2):(2^3-1)=(1+2+4):(8-1)=7:7=1.$

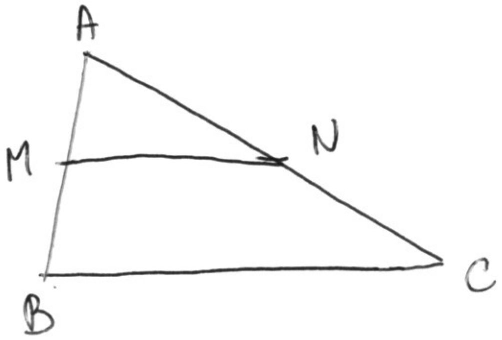
2. $\frac{a}{7}=\frac{5}{3}\Rightarrow \frac{a+7}{7}=\frac{a}{7}+\frac{7}{7}=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$

Este corect și calculul brutal

$\frac{a}{7}=\frac{5}{3}\Rightarrow a=\frac{7\cdot 5}{3}\Rightarrow \frac{a+7}{7}=\frac{\frac{7\cdot 5}{3}+7}{7}=\frac{7\left(\frac{5}{3}+1\right)}{7}=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}.$

3. $I=[-5,3]$

4.



Pentru că M este mijlocul laturii AB avem $AM=\frac{AB}{2}=2$ cm

Pentru că N este mijlocul laturii AC avem $AN=\frac{AC}{2}=3$ cm

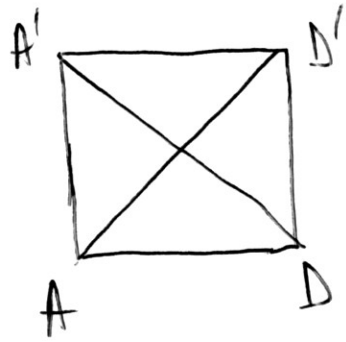
Pentru că M este mijlocul laturii AB și N este mijlocul laturii AC avem $MN=\frac{BC}{2}=4$ cm.

Perimetrul triunghiului ~~ABC~~ AMN este $AM+AN+MN=2\text{ cm}+3\text{ cm}+4\text{ cm}=9\text{ cm}$.

5. Dreapta $B'C$ este paralelă cu dreapta $A'D$.

Prin urmare unghiul dintre dreptele AD' și $B'C$ este unghiul între dreptele AD' și $A'D$

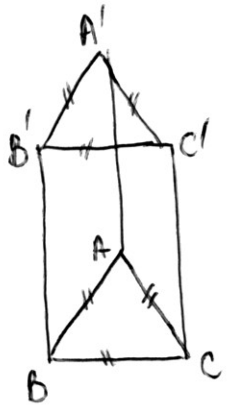
Ne-am redus la o problemă de geometrie plană.



$ADA'D'$ este pătrat, deci unghiul dintre diagonale este de 90 de grade

(6) Numărul total este $26 + 25 + 27 = 78$.

II. 1



(2) Dacă la împărțirea lui n cu 6 avem rest 1 rezultă că 6 divide numărul $n-1$.

Dacă la împărțirea lui n cu 8 avem rest 1 rezultă că 8 divide numărul $n-1$

Dacă 6 și 8 divid numărul $n-1$, atunci și cel mai mic multiplu comun al lui 6 și 8 divide $n-1$, adică 24 divide $n-1$.

Dacă n este cuprins între 40 și 50, $n-1$ este cuprins între 39 și 49

Numerele care se divid cu 24 sunt 0, 24, 48, 72, ... Dintre acestea, singurul divizibil cu 24 este 48.

Deci $n-1 = 48$, deci $n = 49$.

3. Notăm x suma pe care a avut-o sâmbătă dimineața.

După ce a cheltuit două cincimi, a rămas cu trei cincimi, adică cu $\frac{3}{5}x$.

După ce a cheltuit 13 lei din $\frac{3}{5}x$ a rămas cu 8 lei, adică

$$\frac{3}{5}x - 13 \text{ lei} = 8 \text{ lei} \Rightarrow \frac{3}{5}x = 8 \text{ lei} + 13 \text{ lei} = 21 \text{ lei}$$

Rezultă $x = \frac{\cancel{21}^{\,7} \cdot 5}{\cancel{3}} \text{ lei} = 35 \text{ lei}.$

4. a) $a = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$$\frac{a+2}{a-2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-2} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = b$$

b) $b = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1} = 2\sqrt{2}+3 = a+3$

Evident $a < a+3$.

Demonstrație paralelă.

Pentru că $\sqrt{2}-1 > 0$ avem echivalența

$a = 2\sqrt{2} < \overset{b}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$ dacă și numai dacă $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) < \sqrt{2}+1$.

Ultima inegalitate se scrie

$4 - 2\sqrt{2} < \sqrt{2}+1$,

care e valabilă dacă și numai dacă

$4 - 1 < \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

adică dacă $3 < 3\sqrt{2}$. Inegalitatea este adevărată căci $\sqrt{2} > 1$. Deci $a < b$.

5. $E(x) = (1+x)(1-x) + (x+2)^2 - 2(x+2) = 1 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} -$
$-2x \cancel{-4} = 2x+1$

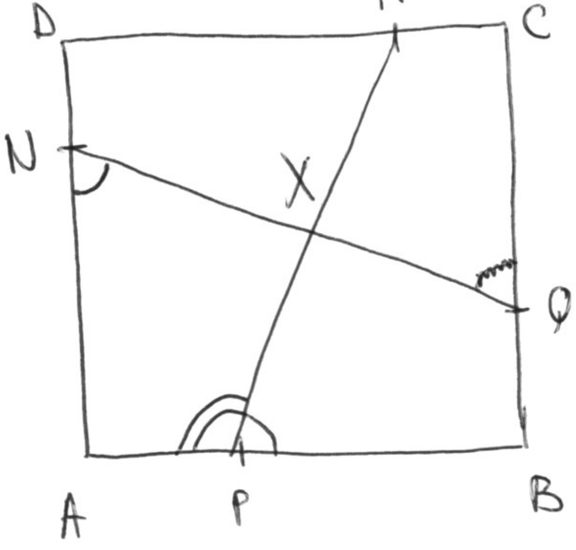
$E(a) = -1 \Leftrightarrow 2a+1 = -1 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$.

III. 1 a) AB are lungimea $5 \cdot 2$ cm $= 10$ cm.
ABCD este pătrat deci perimetrul lui este $4\,AB = 4 \cdot 10$ cm $= 40$ cm

b) Pe tabla de jos sunt 25 de pătrate, din care 12 albe și 13 negre. Cele 25 de pătrate au arii egale ~~notăm~~ X (întâmplător $X = 4$ cm^2 dar nu este important pentru acest punct), deci aria pătratelor albe reprezintă

$$\frac{12X}{25X} = \frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} = 48\%$$

c)



Ne uităm la patrulaterele ABQN și BCMP.
Acestea au trei laturi corespondente egale:

$AB = BC$

$AN = BP$

$BQ = CM$

și câte două unghiuri egale

$\widehat{NAB} = \widehat{PBC} \; (= 90^\circ)$

$\widehat{ABQ} = \widehat{BCM} \; (= 90^\circ)$

Rezultă că cele două patrulatere sunt congruente.

Rezultă că unghiurile $\widehat{QNA}$ și $\widehat{MPB}$ sunt egale.

Pentru că $\widehat{MPA} + \widehat{MPB} = 180^\circ$ rezultă $\widehat{MPA} + \widehat{QNA} = 180^\circ$.

Notăm X intersecția dreptelor MP și NQ.

Avem $\widehat{NAP} = 90^\circ$.

Știm că suma unghiurilor într-un paralelipiped este 360°.

Pentru paralelipipedul APXN avem

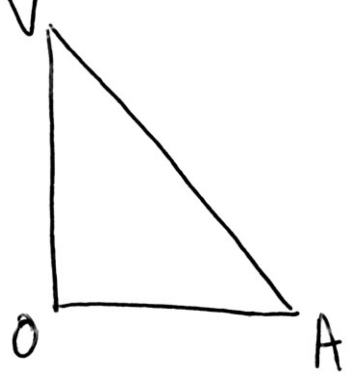
$\widehat{NAP} + (\widehat{APX} + \widehat{XNA}) + \widehat{PXN} = 360^\circ$

adică

$90^\circ + 180^\circ + \widehat{PXN} = 360^\circ \Rightarrow PXN = 90^\circ$.

Unghiul $\widehat{PXN}$ este drept deci dreptele MP și NQ sunt perpendiculare.

2) a) Triunghiul VOA este dreptunghic, căci VO este înălțimea piramidei.



Teorema lui Pitagora arată

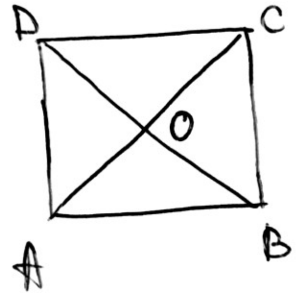
$VA^2 = VO^2 + OA^2$, adică

$36\,m^2 = (3\sqrt{2})^2 m^2 + OA^2$, adică

$36\,m^2 = 18\,m^2 + OA^2$, adică

$OA^2 = 18\,m^2$, adică $OA = 3\sqrt{2}\,m$.

VO este înălțimea piramidei, deci O este intersecția diagonalelor în pătratul ABCD



Triunghiul OAB este dreptunghic isoscel, deci

$AB = OA \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,m \cdot \sqrt{2} = 6\,m$.

b) Pentru că O se găsește pe dreptele AC și BD, dreapta VO se găsește în planele (VAC) și (VBD).

Deci dreapta VO este intersecția planelor (VAC) și (VBD).

Pentru că dreapta VO este perpendiculară pe planul ABCD (din ipoteză este înălțime), unghiul dintre planele (VAC) și (VBD) este unghiul dintre dreptele

$$AC = (VAC) \cap (ABCD) \quad \text{și} \quad BD = (VBD) \cap (ABCD).$$

Dreptele AC și BD sunt diagonalele unui pătrat, deci unghiul dintre ele este 90°.

Rezultă că unghiul dintre planele (VAC) și (VBD) este 90°.

c)

M este mijlocul lui VB, N este mijlocul lui VC, deci dreapta MN este paralelă cu dreapta BC.

Dreptele AD și BC sunt laturile opuse ale unui pătrat, deci sunt paralele.

Rezultă că dreptele MN și AD sunt paralele.

Rezultă că punctele M, N, A, D sunt coplanare.

Rezultă că dreptele DM și AN sunt coplanare.