Examenul de bacalaureat naţional 2015

Matematică *M_mate-info*

Subiectul I

1.$(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}-1)^2=5+2\sqrt{5}+1+5-2\sqrt{5}+1=12.$

2. $f(1)f(2)f(3)f(4)=(-2)\cdot(-1)\cdot 0\cdot 1=0.$

3. Punem condiţia $x^2-4x+4>0 \Leftrightarrow (x-2)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 2$. Ecuaţia devine $x^2-4x+4=1$ $\Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x\in\{1,3\}$.

4. Numerele $\overline{abc}$ impare au c impar, deci $c=3$. Înseamnă că numerele sunt 243 şi 423, deci sunt 2 numere.

5. Panta dreptei AB este $m=\dfrac{3-2}{2-1}=1$. Panta dreptei perpendiculare pe AB în A este $m'\cdot 1=-1\Rightarrow m'=-1$. Obţinem $y-2=(-1)(x-1)\Rightarrow y=-x+3$.

6. $\sin(\pi-x)=\sin\pi\cos x-\cos\pi\sin x=\sin x$. Analog $\sin(\pi+x)=\sin\pi\cos x+\cos\pi\sin x=-\sin x$. Adunând obţinem concluzia.

Subiectul II

1. a) $\det B(0)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1.$

b) $B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\3\frac{x+y}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B(\frac{x+y}{2})$

c) $B(x^2+1)B(x)=\begin{pmatrix}1+3x(x^2+1)&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3(x^2+x+1)&0&1+3x(x^2+1)\end{pmatrix}.$

Egalitatea $B(x^2+1)B(x)=B(x^2+x+1)$ este echivalentă cu $1+3x(x^2+1)=1$. Deducem că $3x(x^2+1)=0$, deci $x=0$ pentru că ecuaţia $x^2+1=0$ nu are soluţii reale.

2. a) $(-3)\circ 3=\frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3=3.$

b) $n\circ n=11\Leftrightarrow \frac{1}{2}(n-3)^2+3=11\Rightarrow (n-3)^2=16\Rightarrow n\in\{-1,7\}\cap\mathbb{N}\Rightarrow n=7.$

c) Observăm că $x\circ 3=3\circ x=3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Deci $1\circ 2\circ ...\circ 2015=a\circ 3\circ b=3\circ b=3$, unde $a=1\circ 2$ şi $b=4\circ 5\circ ...\circ 2015$.

Subiectul III

1. a) $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=-\dfrac{3}{(x-1)^2}.$

b) $f''(x)=\left(-3(x-1)^{-2}\right)'=6(x-1)^{-3}>0,\ \forall x>1\Rightarrow$ funcţia este convexă pe $(1,+\infty)$.

c) Panta tangentei la grafic în punctul $A(x_0, f(x_0))$ este -3, deci $f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{(x_0-1)^2} = -3 \Rightarrow (x_0-1)^2 = 1$. Obţinem $x_0 \in \{0, 2\} \cap (1, +\infty) \Rightarrow x_0 = 2$. Punctul căutat este $A(2, 4)$.

2. a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} f(x)\, dx = \int_1^2 e^x\, dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e = e(e-1)$.

b) $\displaystyle\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + \mathcal{C}$. Din $F(1) = 0$ deducem $1 \cdot e - e + \mathcal{C} = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = 0$. Deci $F(x) = xe^x - e^x = (x-1)e^x$.

c) $\displaystyle I_n = \int_0^1 xf(x)\, dx = \int_0^1 x^{n+1} e^x\, dx = x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x\, dx = e - (n+1) I_{n-1}$. Deci $I_n + (n+1) I_{n-1} = e$.