ȘTIINȚELE NATURII

SUBIECTUL I

1. $z^2-2i=(1+i)^2-2i=1+2i+i^2-2i=1-1=0$

2. $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(0)=2015$

3. $5^{x^2-5x}=5^{3-3x} \Leftrightarrow x^2-5x=3-3x \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Delta=b^2-4ac=4+12=16 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm4}{2}=$

$=1\pm2 \Rightarrow x\in\{-1;3\}$

4. $C_5^4=C_5^1=5$

Sunt 5 submulțimi

5. Dreapta $y=2x+7$ are panta $m_1=2$

Dreptele sunt paralele, deci pantele sunt egale

$\Rightarrow m=2$

ec. dreptei ce conține A și are panta m este

$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-4=2x \Rightarrow y=2x+4$

6. Fie S aria triunghiului MNP

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}MN\cdot MP\cdot\sin(\hat{M})=\frac{1}{2}\cdot12\cdot3\cdot\sin30^\circ=36$

pt că $\sin30^\circ=\frac{1}{2}$

SUBIECTUL II

1. a) $A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2 \Rightarrow \det A(0)=\det I_2=1$

b) $\det A(a)=0 \Leftrightarrow 1-a^2=0 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow |a|=1$

$\Leftrightarrow a\in\{-1;1\}$

c) $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&-a\\-a&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-b\\-b&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ab&-b-a\\-a-b&ab+1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&-(a+b)\\-(a+b)&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ab&0\\0&ab\end{pmatrix}=A(a+b)+ab\,I_2$

II 2a) $f(0) = 0^3 - m\cdot 0 + 2 = 2$

b) Restul împărțirii lui f la X^2+X-2 este 0

$\Leftrightarrow$ f divizibil cu X^2+X-2

dar $X^2+X-2 = (X-1)(X+2)$

deci f divizibil cu $X-1$ și cu $X+2$

deci conform Th Bézout $f(1) = f(-2) = 0$

$\Leftrightarrow 1-m+2 = -8+2m+2 = 0 \Leftrightarrow m=3$

c) x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x_1^3 - mx_1 + 2 = 0$
$x_2^3 - mx_2 + 2 = 0$
$x_3^3 - mx_3 + 2 = 0$

Prin adunare se obține

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - m(x_1+x_2+x_3) + 6 = 0$

Conform relațiilor lui Viète $x_1+x_2+x_3 = 0$

deci $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$

SUBIECTUL III

1. a) f este compunere de funcții elementare, deci derivabile $\Rightarrow f$ derivabilă în 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$ $\Big/ \Rightarrow f'(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

dar $f'(x) = e^x - 1$

b) $x<0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

$\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$

III 1. c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - -$	0	$+ + + + + +$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Conform tabelului $f(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$

2. a) $\int_0^1 (f(x)+2x-5)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

b) $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int_0^2 \left(\ln|f(x)|\right)'\,dx =$

$= \ln|f(x)|\Big|_0^2 = \ln f(2) - \ln f(1) =$

$= \ln \frac{f(2)}{f(1)} = \ln \frac{5}{4}$

c) $\int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{4}$

$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow f(x) \geq 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$

pt $x \in [2014; 2015]$, $f(x) > 0$ $\Rightarrow$

$\forall x \in [2014, 2015]; \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \int_{2014}^{2015} \frac{1}{4}\,dx$

$\Rightarrow \int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{4}x\Big|_{2014}^{2015} \Rightarrow \int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{4}$