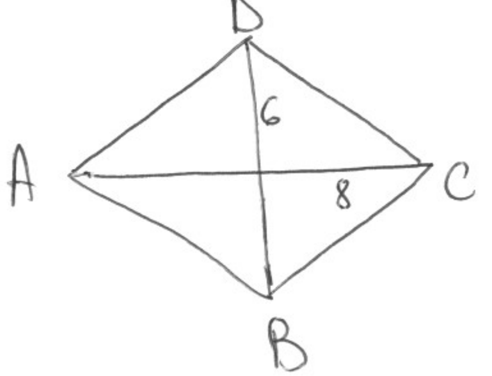
Subiectul I

1. $12-6\cdot 2=12-12=0$.

2. Dacă 10 reprezintă 50% dintr-un număr, el reprezintă jumătate din acel număr. Deci numărul este dublul lui 10, adică 20.

3. Cel mai mare număr natural pentru care $n\leq 8$ este 8.

4.



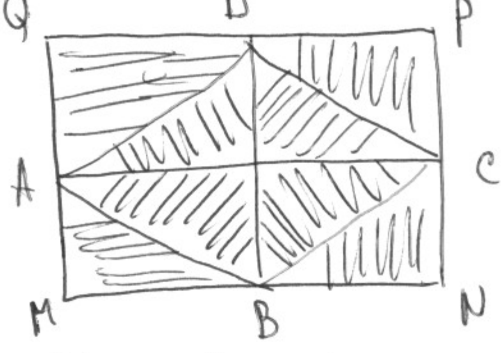
Soluția 1: Aria rombului este jumătate din produsul diagonalelor, adică $\frac{6\cdot 8}{2}=24\ cm^2$.

Soluția 2: Fie O intersecția celor două diagonale. BO este înălțime în triunghiul ABC, DO este înălțime în triunghiul ACD. O este mijlocul segmentului BD, deci $BO=DO=3$ cm.

Aria rombului este suma ariilor triunghiurilor ABC și ACD, adică

$$\frac{BO\cdot AC}{2}+\frac{DO\cdot AC}{2}=\frac{3cm\cdot 8cm}{2}+\frac{3cm\cdot 8cm}{2}=12cm^2+12cm^2=24cm^2.$$

Soluția 3:



Aria fiecăruia dintre cele 4 triunghiuri care compun rombul este egală cu aria triunghiurilor exterioare:

aria (ABO) = aria (ABM)

aria (BCO) = aria (BCN)

aria (CDO) = aria (CDP)

aria (DAO) = aria (DAQ)

Rezultă că aria rombului este jumătate din aria dreptunghiului $MNPQ$, adică $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\text{cm}^2$.

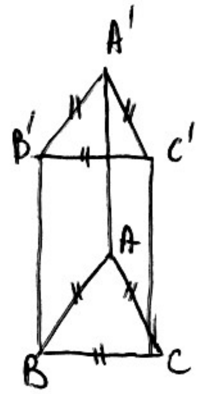
5. Tetraedrul este regulat, deci toate muchiile au 8 cm.
Tetraedrul are 6 muchii, deci suma muchiilor este
$6 \cdot 8\text{ cm} = 48\text{ cm}$.

6. $100\% - 45\% - 27\% - 15\% = 13\%$

100 elevi $\cdot$ 13% = 100 elevi $\cdot \frac{13}{100}$ = 13 elevi.

Subiectul al II-lea

1.



2. $a = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$

$b = 3 + 3 : 3 = 3 + 1 = 4$.

Media geometrică este $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$.

3. Notăm L lungimea drumului parcurs în trei zile.

În prima zi a parcurs $20\% L = \frac{20}{100} L = \frac{1}{5} L$.

Rezultă că i-a rămas de parcurs în zilele a doua și a treia

$$L - \frac{1}{5}L = \frac{4}{5}L.$$

În a doua zi a parcurs 30% din acest rest, adică

$$30\% \cdot \frac{4}{5} L = \frac{30}{100} \cdot \frac{4}{5} L = \frac{6}{25} L$$

Rezultă că i-a rămas pentru ultima zi

$$L - \frac{1}{5}L - \frac{6}{25}L = \frac{25-5-6}{25}L = \frac{14}{25}L$$

Această distanță este egală cu 560 km, adică

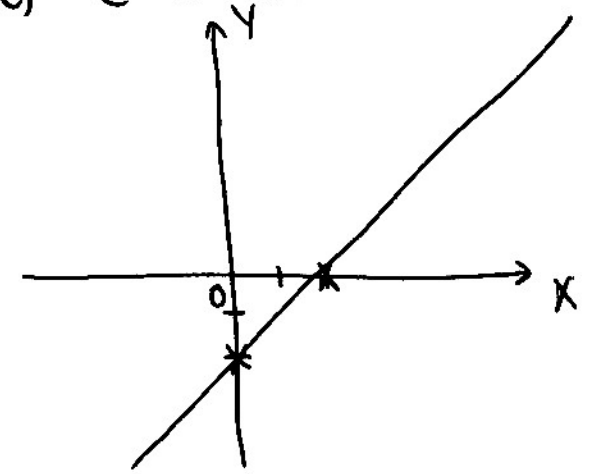
$$\frac{14}{25}L = 560\,km$$

Rezultă

$$L = 560\,km \cdot \frac{25}{14} = 1000\,km.$$

4. a) $f(2) = 2 - 2 = 0$.

b)



$f(0) = -2$, $f(2) = 0$.

Graficul este dreapta care trece prin punctele $(0,-2)$ și $(2,0)$.

5. $E(x) = \frac{(x+2)^2}{x(x+2)} : \frac{x+2}{x} = \frac{(x+2)^2}{x(x+2)} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{x(x+2)^2}{x(x+2)^2} = 1.$

Subiectul al III-lea

1. a) Triunghiul AOD este echilateral cu latura $AD = 2m$ deci perimetrul său este $3 \cdot 2m = 6\ m$.

b) Începem prin a demonstra că $OB = OC$.

Triunghiul AOD este echilateral deci $m(\widehat{OAD}) = m(\widehat{ADO}) = 60°$

ABCD este dreptunghi deci $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ADC}) = 90°$.

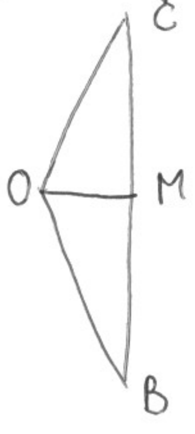
Rezultă $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{ODC}) = 90° - 60° = 30°$.

Triunghiurile OAB și ODC sunt congruente căci:

- unghiurile $\widehat{OAB}$ și $\widehat{ODC}$ sunt egale
- laturile OA și OD sunt egale, căci triunghiul OAD este echilateral
- laturile AB și DC sunt egale, căci ABCD este dreptunghi.

Rezultă $OB = OC$, ca laturi ale unor triunghiuri congruente.

Rezultă că triunghiul BOC este isoscel



Fie M mijlocul ~~de~~ segmentului BC.

Întrucât triunghiul BOC este isoscel, OM este și bisectoare, deci $m(\widehat{BOM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BOC})$.

Ipoteza este $m(\widehat{BOC}) = 2\ m(\widehat{AOD})$.

Triunghiul AOD este echilateral, deci $m(\widehat{AOD}) = 60^\circ$.

Rezultă $m(\widehat{BOC}) = 120^\circ$, deci $m(\widehat{BOM}) = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$.

Triunghiul BOC este isoscel, deci OM este ~~m~~ și înălțime, deci unghiul $\widehat{OMB}$ este drept.

Rezultă

$$tg(\widehat{BOM}) = \frac{MB}{OM}.$$

În această ecuație

$$tg(\widehat{BOM}) = tg(60^\circ) = \sqrt{3}$$

$$MB = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} \text{ (căci ABCD dreptunghi)} = 1\,m.$$

Rezultă

$$OM = \frac{MB}{tg(\widehat{BOM})} = \frac{1\,m}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,m.$$

Am văzut că OM este înălțime, deci OM este distanța de la punctul O la dreapta BC. Deci această distanță este $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m

c) Am văzut la punctul precedent că triunghiul BOC este isoscel și ~~Am~~ că $m(\widehat{BOC}) = 120^\circ$.

Din ecuația

$$m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{OBC}) + m(\widehat{OCB}) = 120^\circ$$

rezultă $2m(\widehat{OBC}) = 60^\circ$, deci $m(\widehat{OBC}) = 30^\circ$.

~~M~~ ABCD este dreptunghi deci $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$.

Rezultă $m(\widehat{ABO}) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Am văzut la punctul precedent că $m(\widehat{OAB}) = 30^\circ$.

Triunghiul OAB are deci

$m(\widehat{ABO}) = 60^\circ$

$m(\widehat{OAB}) = 30^\circ$

Din egalitatea

$$m(\widehat{ABO}) + m(\widehat{OAB}) + m(\widehat{AOB}) = 180^\circ$$

rezultă $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$, deci triunghiul AOB este dreptunghic.

Rezultă

$$\sin(\widehat{ABO}) = \frac{AO}{AB}.$$

În această ecuație

$$\sin(\widehat{ABO}) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$AO = AD = 2\ m$ căci triunghiul AOD este echilateral. Rezultă

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2m}{AB} \Rightarrow AB = \frac{4}{\sqrt{3}}\ m.$$

Covorul este dreptunghiular deci lungimea conturului său este

$$2(AB + AD) = 2\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + 2\right) m.$$

~~Egala~~ Inegalitatea

$$2\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + 2\right) < 9$$

este echivalentă succesiv cu

$$\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 < \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} < \frac{9}{2} - 2 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 < \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} < \frac{25}{4} \Leftrightarrow 64 < 75.$$

Deci lungimea covorului este mai mică de 9 m.

2. a) Volumul este $AB \cdot AD \cdot AE = AB^2 \cdot AE = (20\text{ cm})^2 \cdot 10\text{ cm} = 4000\text{ cm}^3$.

b) Aria cutiei este

$2 \cdot \text{aria}(ABCD) + 2 \cdot \text{aria}(ABFE) + 2 \cdot \text{aria}(ADHE)$

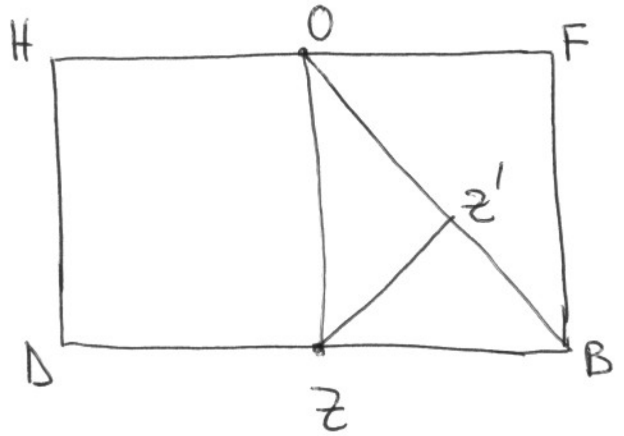
căci fețele sunt două câte două congruente.
Calculăm acest număr ținând cont de faptul că fiecare latură este dreptunghi:

$2 \cdot 20\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} + 2 \cdot 20\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} + 2 \cdot 20\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 1600\text{ cm}^2$.

Aria suprafeței cartonului este

$110\% \cdot 1600\text{ cm}^2 = \frac{110}{100} \cdot 1600 = 1760\text{ cm}^2$.

c) Considerăm planul HDBF.



Notăm Z mijlocul segmentului BD.

~~Notăm Z' mijlocul segmentului OB~~

~~intersecția BD~~

Notăm Z' proiecția punctului Z pe dreapta OB. Vom arăta $Z' = M$.

Arătăm pentru început că dreapta CZ este perpendiculară pe planul HDBF.

Pentru acest fapt observăm că dreapta CZ este perpendiculară pe dreapta BD (sunt diagonale într-un pătrat)

Dreapta CZ este perpendiculară pe întregul plan HDBF căci face parte din planul EACG perpendicular pe planul HDBF.

Distanța cea mai mică de la punctul C la dreapta OB se atinge în punctul M pentru care CM este perpendicular pe OB. Acesta este punctul Z' pentru care OZ' este perpendicular pe OB. Rezultă $M = Z'$ și

$$CM^2 = CZ^2 + ZZ'^2.$$

~~$CO = AE = 10$ cm.~~

~~Rămâne de determinat ZZ'~~

~~DB este diagonală în pătratul ABCD deci $DB = 20\sqrt{2}$ cm.~~

~~Rezultă~~

CZ este jumătate din diagonala pătratului ABCD deci

$CZ = 10\sqrt{2}$ cm.

Rămâne de determinat ZZ'.

Avem triunghiul dreptunghic OZB cu

$OZ = HD = 10$ cm

$ZB = \frac{BD}{2} = 10\sqrt{2}$ cm (jumătate din diagonala pătratului ABCD).

Din teorema Pitagora rezultă $OB = 10\sqrt{3}$ cm.

Din formula ariei

$$\frac{OZ \cdot ZB}{2} = \frac{ZZ' \cdot OB}{2} \Rightarrow ZZ' = \frac{OZ \cdot ZB}{OB} = \frac{10\text{ cm} \cdot 10\sqrt{2}\text{ cm}}{10\sqrt{3}\text{ cm}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\text{ cm}$$

Rezultă $CM^2 = CZ^2 + ZZ'^2 = 200\ cm^2 + \frac{200}{3}\ cm^2 = \frac{800}{3}\ cm^2$

Rezultă $CM = 20\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ cm$.